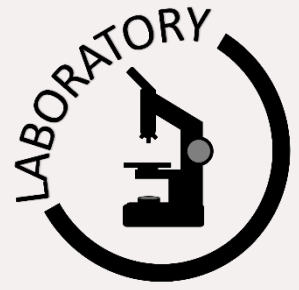




به نام خدا



جلسه سوم: آونگ ساده و مرکب

مدرس: دکتر احسان فتحی

مدیر و موسس آموزشگاه آزاد فنی و حرفه‌ای فتحی

Telegram & Instagram: @FathiTrainingGroup

Website: FathiTrainingGroup.com

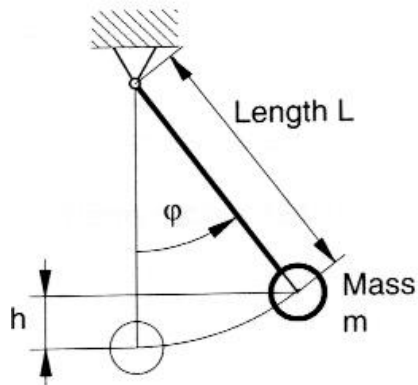
Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com

Tel: 09386249330, 05191012910

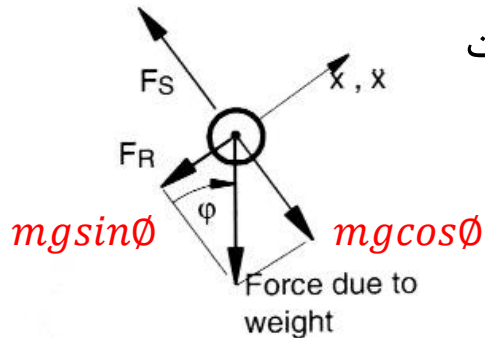
فهرست مطالب

- هدف آزمایش
- تئوری آزمایش
- وسایل انجام آزمایش
- دستگاه آزمایش
- محاسبه مقادیر تئوری
- محاسبه درصد خطای آزمایشگاهی
- روش انجام آزمایش
- خواسته‌های آزمایش

- محاسبه و بررسی عوامل موثر بر دوره تناوب حرکت آونگ‌ها



Mathematical pendulum in deflected position



Forces at concentrated mass

○ آونگ ریاضی یا ساده (Mathematical Pendulum)

ساده ترین مدل آونگ، آونگ ریاضی می باشد، که شامل یک جرم متمرکز آویزان از یک نخ بدون وزن است. آونگ در یک صفحه در میدان جاذبه زمین نوسان می کند. معادله دیفرانسیلی حاکم (معادله حرکت) که حرکت آونگ را توصیف می کند از نمودار مقابل به دست می آید.

آونگ به اندازه زاویه φ منحرف می گردد. بنابراین، مرکز جرم متمرکز به اندازه h بالا برده می شود. اگر آونگ رها گردد نیروی بازگرداننده F_R به عنوان مولفه ای از نیروی وزن تلاش می کند که آونگ را به موقعیت اولیه اش برگرداند.

با نوشتن معادله حرکت در جهت x با شتاب مرکز جرم \ddot{x} و نیروی بازگرداننده $F_R = mg \sin \varphi$ داریم:

$$m\ddot{x} = -mg \sin \varphi$$

شتاب زاویه‌ای را می‌توان با \ddot{x} مرتبط گردانید، از آنجایی که جرم یک مسیر دایره‌ای را طی می‌کند لذا:

$$x = L\varphi \quad \ddot{x} = L\ddot{\varphi}$$

در نتیجه معادله حرکت تبدیل خواهد شد به:

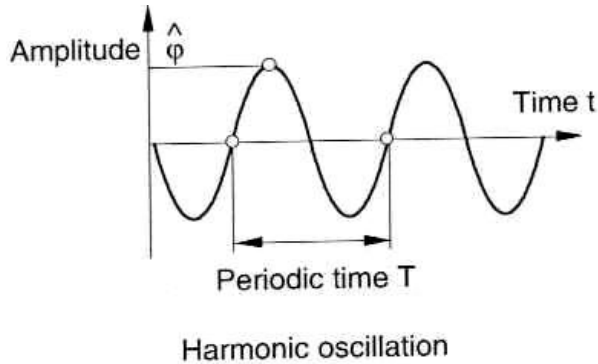
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0$$

این یک معادله دیفرانسیل غیر خطی است که با فرض انحراف کوچک φ یعنی:

$$\sin \varphi = \varphi \quad \varphi \ll \pi$$

می‌توان آن را خطی کرد. در نتیجه معادله حرکت برای آونگ ریاضی عبارت خواهد بود از:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \varphi = 0$$



جواب معادله یک نوسان هارمونیک می باشد که به صورت:

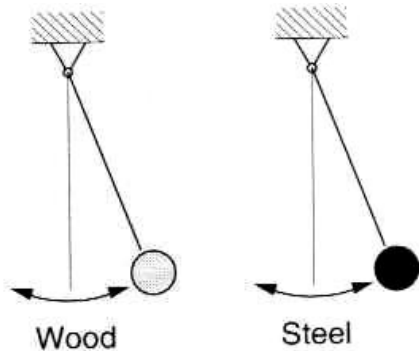
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \hat{\varphi} \sin \omega t$$

بیان می گردد که ω فرکانس نوسان می باشد. با دو بار دیفرانسیل گیری و جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

و زمان تناوب:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



Mass / material has no effect on period of oscillation

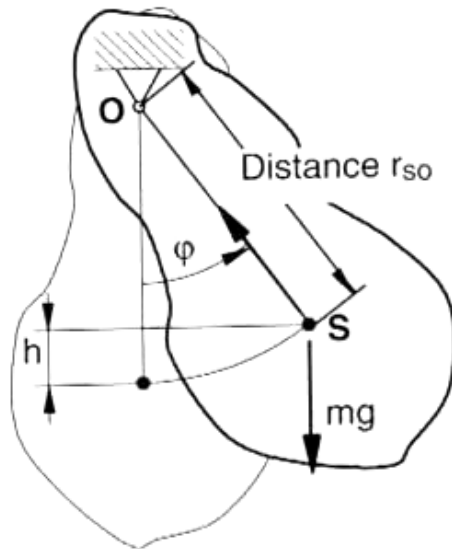
تئوری آزمایش

این فرکانس طبیعی و زمان تناوب نوسان آونگ می‌باشد. عوامل حاکم بر این کمیات طول آونگ L و ثابت گرانش g می‌باشد. جرم آونگ و ماده‌ای که آونگ از آن ساخته شده است تاثیری بر فرکانس طبیعی نوسان سیستم ندارد.

○ آونگ فیزیکی (Physical Pendulum)

آونگ فیزیکی آونگی است که جرم آونگ در یک نقطه متمرکز نمی‌باشد در حقیقت همه آونگ‌ها فیزیکی می‌باشد چون غیر ممکن است به صورت ایده ال جرم را در یک نقطه متمرکز نمود. برای به دست آوردن معادله حرکت لازم است که گشتاور حول نقطه آویز (تکیه‌گاه) را معادل تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه یا \dot{H}_0 قرار داد.

از آنجایی که:

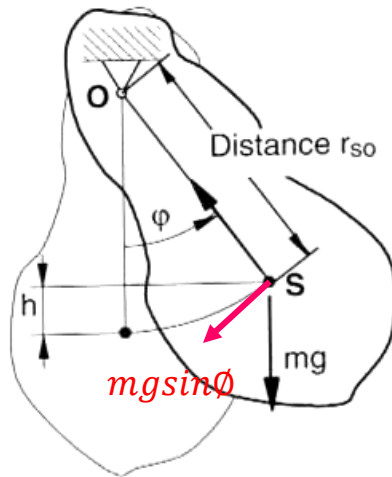


$$H_o = J_o \omega = J_o \dot{\phi}$$

در نتیجه:

$$\sum M_o = J_o \ddot{\phi}$$

از آنجاییکه:



$$\sum M_o = -mgr_{so} \sin \varphi$$

می باشد خواهیم داشت:

$$J_o \ddot{\varphi} = -mgr_{so} \sin \varphi$$

با جایگزینی و خطی کردن این معادله، معادله حرکت به صورت زیر به دست می آید:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgr_{so}}{J_o} \varphi = 0$$

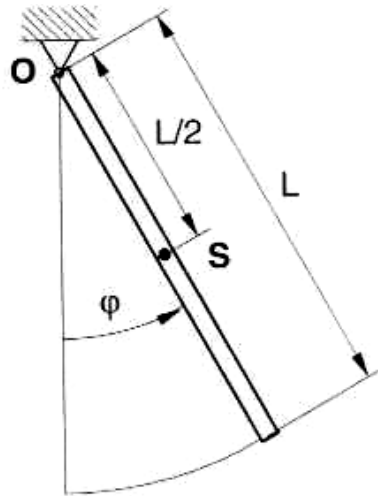
محاسبه فرکانس طبیعی و زمان تناوب نوسان همانند آونگ ریاضی می باشد.

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgr_{so}}{J_o} \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mgr_{so}}{J_o}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_o}{mgr_{so}}}$$

ممان اینرسی J_o حول نقطه آویز O از ممان اینرسی حول مرکز جرم J_s و استفاده از انتقال محورهای موازی بدست می آید:

$$J_o = J_s + mr_{so}^2$$



$$J_S = \frac{1}{12} mL^2$$

برای یک میله نازک داریم:

$$J_O = \frac{1}{12} mL^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = mL^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right)$$

$$J_O = \frac{mL^2}{3}$$

از طرفی معادله حرکت یک میله باریک به صورت زیر می باشد:

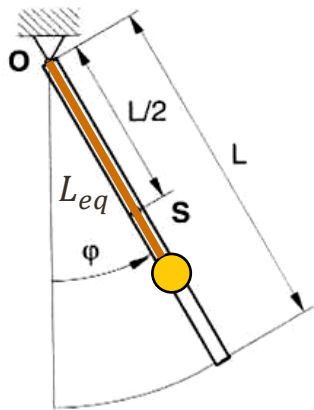
$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2L} \varphi = 0$$

در نتیجه فرکانس طبیعی و زمان تناوب نوسان برای یک میله عبارت است از:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

○ طول معادل و مرکز ضربه:



طول معادل L_{eq} یک آونگ فیزیکی عبارت است از طول یک آونگ ریاضی که زمان تناوب آن معادل آونگ فیزیکی باشد. یعنی:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{mgr_{so}}}$$

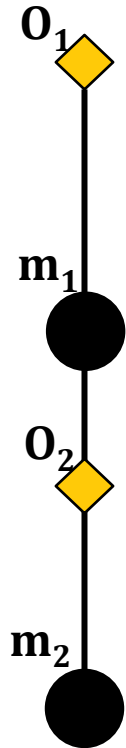
در نتیجه طول معادل به صورت زیر خواهد بود:

$$L_{eq} = \frac{J_0}{mr_{so}}$$

برای آونگ میله‌ای داریم:

$$J_0 = mL^2/3 \quad r_{so} = \frac{L}{2}, \quad L_{eq} = \frac{mL^2/3}{mL/2} = \frac{2}{3}L$$

○ آونگ معکوس (Reversible Pendulum)

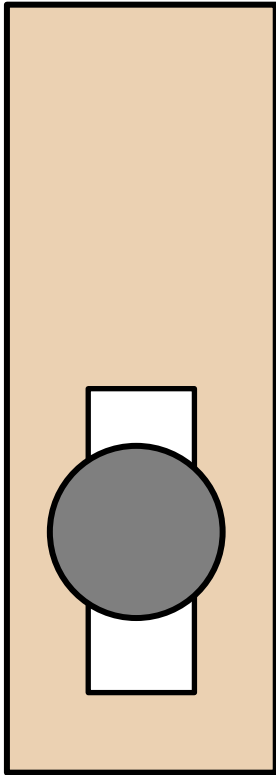


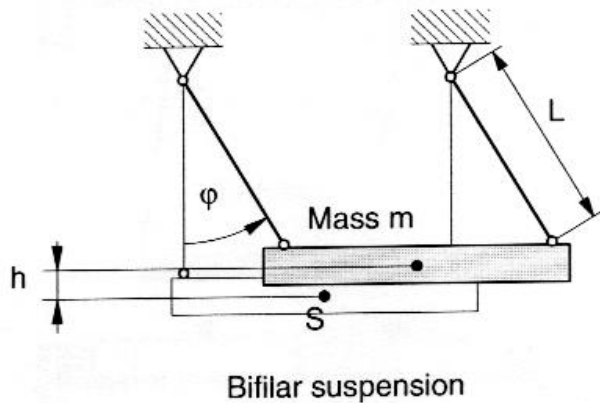
این نوع آونگ دارای دو نقطه آویزان (تکیه‌گاه) می‌باشد. ویژگی خاص چنین آونگی این است که چنانچه از هر یک از این نقاط آویزان گردد زمان تناوب آن فرقی نخواهد کرد. فاصله بین دو نقطه برابر طول معادل آونگ می‌باشد. این اثر مشابه سازی ایده آل یک آونگ ریاضی می‌باشد. در آونگ ریاضی فاصله بین تکیه‌گاه و مرکز جرم برابر طول معادل آونگ می‌باشد.

زمان تناوب فقط تابعی از طول معادل و شتاب جاذبه می‌باشد. از آنجاییکه بدست آوردن طول معادل یک آونگ نسبتاً پیچیده می‌باشد از روش تجربی استفاده شده است. فاصله x بین دو تکیه‌گاه طوری تنظیم می‌شود که زمان تناوب T برای هر دو تکیه‌گاه یکسان گردد. در نتیجه فاصله x دقیقاً برابر طول معادل آونگ L_{eq} می‌باشد.

○ آونگ صلب چوبی

آونگ صلب چوبی به عنوان مثالی از یک آونگ غیر همگن با هندسه‌ای پیچیده استفاده می‌شود. زمان تناوب نوسان را می‌توان بوسیله اتصال یک جرم فولادی اضافه تنظیم نمود.





○ آونگ با دو نخ آویز

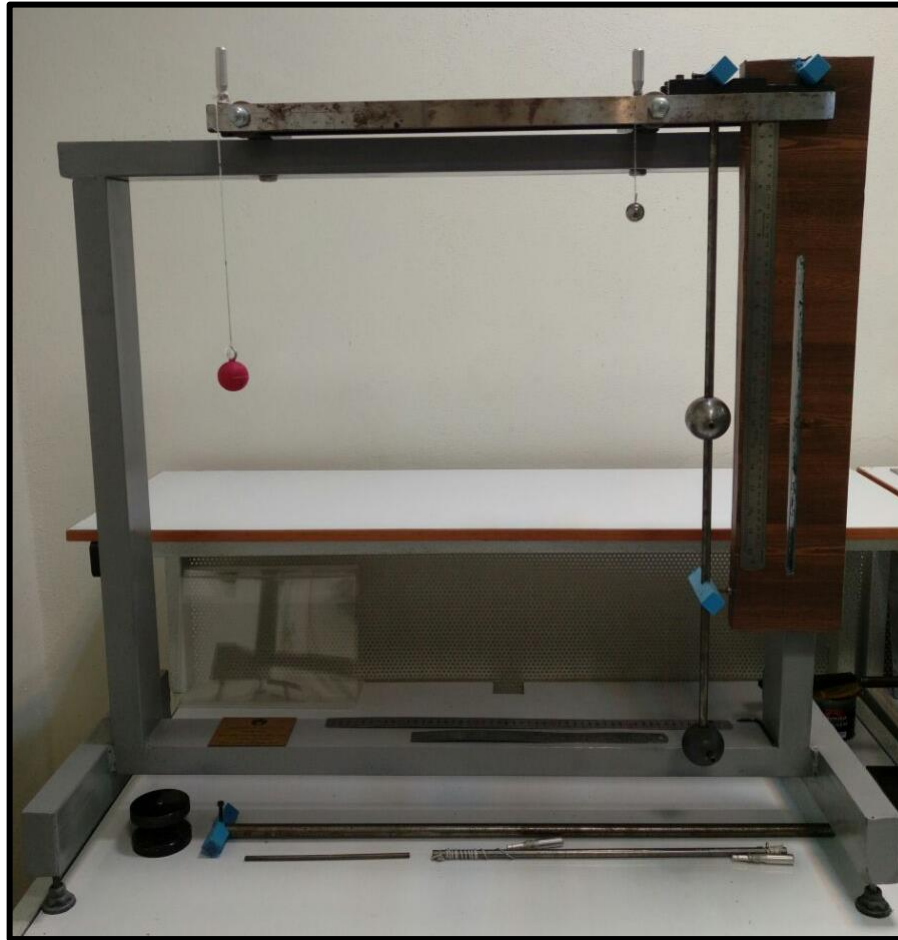
یک آونگ دو نخه (یعنی آونگی که از دو نخ آویزان شده باشد) از نظر معادله حرکت متناظر با آونگ ایده آل ریاضی می باشد. از آنجاییکه در این آزمایش جرم دارای یک حرکت انتقالی منحنی الخط دورانی می باشد که متناظر با جرم متمرکز آونگ ریاضی است. زمان تناوب نوسان فقط تابعی از طول نخهای آویز و شتاب جاذبه می باشد، یعنی:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

اندازه و شکل جرم آونگ تاثیری بر زمان تناوب ندارد .

وسایل انجام آزمایش

- ✓ پایه
- ✓ جرم متمرکز
- ✓ جرم نامتقارن چوبی
- ✓ میله
- ✓ کورنومتر جهت اندازه گیری دوره تناوب آونگ
- ✓ متر جهت اندازه گیری طول آونگ
- ✓ آچار جهت سفت کردن اتصالات



محاسبه مقادیر تئوری

طبق آن چه در تئوری آزمایش بدست آورده شد، فرمول‌های لازم برای محاسبه مقادیر تئوری هر مرحله عبارتند از:

۱- آونگ ساده:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

۲- آونگ فیزیکی:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{so}}{J_o}} \quad \longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_o}{mgr_{so}}} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$



محاسبه درصد خطای آزمایشگاهی

نحوه محاسبه درصد خطای آزمایشگاهی از رابطه زیر بدست می آید:

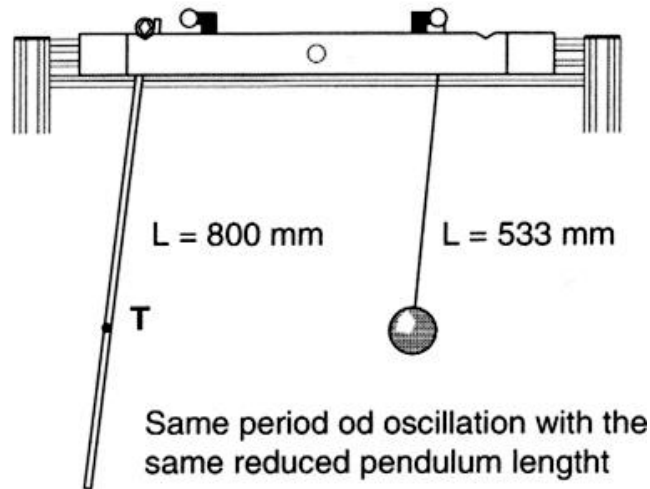
$$\text{درصد خطای آزمایشگاهی} = \frac{\text{مقدار عملی} - \text{مقدار تئوری}}{\text{مقدار تئوری}} \times 100$$

۴- آزمایش چهارم: مرکز ضربه

مرکز ضربه نقطه مهمی در اجسامی است که حول یک نقطه دوران می‌کنند، می‌دانیم که مرکز ضربه نقطه‌ای است که برآیند کلیه نیروهای وارد بر جسم که حول نقطه O دوران می‌کند از آن نقطه می‌گذرد در نتیجه چنانچه به این نقطه نیرویی وارد گردد تاثیری بر تکیه‌گاه نخواهد داشت.

این مسئله را با قرار دادن تکیه‌گاه در یک سطح صاف خارج از تکیه‌گاه V شکل بررسی کنید. حال به مرکز ضربه، توسط یک چوب ضربه‌ای وارد کنید. آیا تکیه‌گاه جابجا می‌شود؟ به پایین تر و بالاتر از مرکز ضربه هم ضربه وارد کنید. چه خواهید دید؟

۵- آزمایش پنجم: مقایسه آونگ میله‌ای و نخ‌ی با آونگ طول معادل L_{eq}
 حال طول نخ آونگ ساده را معادل L_{eq} قرار دهید و زمان تناوب آن را به دست آورید. چه رابطه‌ای با آونگ میله‌ای دارد؟ توضیح دهید.





جدول داده‌های آزمایش و نتایج تئوری

آزمایش پنجم:

تعداد نوسان	زمان کل آونگ نخی	دوره تناوب آونگ نخی	دوره تناوب آونگ میله ای (از آزمایش دوم)
5	7.15	1.43	1.45
10	14.80	1.48	1.48
15	22.20	1.48	1.46

روش انجام آزمایش

خواسته های آزمایش:

۱- تکمیل جدول

۲- ترسیم دوره تناوب آونگ میله ای و نخ‌ی بر حسب تعداد نوسانات در نرم افزار اکسل

روش انجام آزمایش

۶- آزمایش ششم: آونگ با زمان تناوب دو ثانیه

در این آزمایش تکیه‌گاه را به نقطه‌ای انتقال می‌دهیم که زمان تناوب آن $2s$ گردد. با استفاده از رابطه دوره تناوب برای آونگ مرکب داریم:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{mgr_{so}}} \quad J_0 = J_G + mr_{so}^2$$

اگر آونگ یک میله باشد داریم: $J_G = mL^2/12$

$$mgr_{so}T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{mL^2}{12} + mr_{so}^2 \right), \quad 12r_{so}^2 - 11.92r_{so} + 0.64 = 0 \quad \text{در نتیجه:}$$

بعد از محاسبه r_{so} و قرار دادن تکیه‌گاه در محل، فرکانس طبیعی و زمان تناوب آونگ را به دست آورده و جدول ۲ از این آزمایش را تکمیل نمایید.

جدول داده‌های آزمایش و نتایج تئوری

آزمایش ششم:

جدول شماره ۱

L (mm)	r_{so} (mm)
800	57

جدول شماره ۲

تعداد نوسان	زمان	دوره تناوب تجربی	دوره تناوب تئوری	درصد خطا
5	10.05	2.010	2	0.50
10	19.95	1.995		0.25
15	29.80	1.986		0.70

روش انجام آزمایش

خواسته های آزمایش:

۱- تکمیل جدول

۲- ترسیم دوره تناوب بر حسب تعداد نوسانات در نرم افزار اکسل

۳- ترسیم منحنی درصد خطا بر حسب تعداد نوسانات در نرم افزار اکسل

۴- بررسی عوامل خطا

امام صادق (ع):

نماز، بهترین کارها نزد خداوند و آخرین وصیت‌های پیامبران الهی است.